SOBRE UN TEOREMA DE G. CONTOPOULOS REFERENTE A UN CIERTO TIPO DE TRANSFORMACIONES CANONICAS

C.A. Altavista

FCAGLP

RESUMEN: En un trabajo publicado por G. Contopoulos en 1963 este autor ha demostrado un teorema según el cual Hamiltonianos de la forma:

$$F = s_1 q_1 + s_2 q_2 + \mu F^{*}(q_1, q_2, p_1, p_2)$$

donde p_1 y p_2 son funciones periódicas de período 2π, mantienen su forma cuando son sometidos a transformaciones canónicas que satisfagan el teorema de Poincaré. Sin embargo, en un trabajo posterior G.E.O. Giacaglia ha propuesto la transformación:

$$x_1 = H \qquad y_1 = h - 1 - g$$
$$x_2 = 2(L-G) \qquad y_2 = 2(L-G)1$$
$$x_3 = 2(G-H) \qquad y_3 = 2(G-H)(1+g)$$

en virtud de la cual el Hessiano calculado a partir del término no perturbado del nuevo Hamiltoniano no sea nula, lo cual constituye una contradicción del teorema de G. Contopoulos. El examen de este teorema lleva a la conclusión que en la demostración existen hipótesis no plausibles que lo invalidan.

1.- En un apéndice del trabajo titulado "On the Existence of a Third Integral of Motion", A.J. 68 N° 1, 1963, G. Contopoulos presenta el caso de Hamiltonianos de la forma:

$$F = s_1 q_1 + s_2 q_2 + \mu F^*(q_1, q_2, p_1, p_2) ,$$

donde s_1 y s_2 son constantes, p_1 y p_2 son funciones periódicas de período 2π. Con respecto a este Hamiltoniano ese autor afirma que: "no existe una transformación continua de variables canónicas que satisfagan el teorema de Poincaré".

Aquí daremos una síntesis básica del trabajo mencionado y posteriormente haremos un análisis de los resultados que el autor ha obtenido, para demostrar que existen en los mismos conclusiones inconsistentes que invalidan las hipótesis realizadas.

Supongamos con dicho autor que se efectúe una transformación canónica $(q_1,q_2,p_1,p_2) \to (q_1',q_2',p_1',p_2')$, tal que si:

$$S = S(q_1',q_2',p_1,p_2)$$

es la función determinante que permite obtener las nuevas coordenadas primadas por medio de las fórmulas:

$$q_i = \frac{\nu S}{\nu p_i} \quad , \quad p_i' = \frac{\nu S}{\nu q_i'}$$

mediante las cuales resulta la ecuación:

$$S_1 \frac{\nu S}{\nu p_1} + S_2 \frac{\nu S}{\nu p_2} = f\,(q_1', q_2')$$

La solución de esta ecuación es:

$$S = f\, p_2/S_2 + A(\omega, q_1', q_2')$$

A es una función arbitraria de los argumentos del problema y $\omega = p_1 - s_1 p_2/s_2$.

Si con los índices 1 y 2 se indican derivaciones respecto a q_1' y q_2' G. Contopoulos afirma la validez de las siguientes relaciones:

$$(1)\quad A_1(\omega + 2\pi, q_1', q_2') - A_1(\omega, q_1', q_2') = K_1 P_1'$$

$$(2)\quad A_2(\omega + 2\pi, q_1', q_2') - A_2(\omega, q_1', q_2') = K_2 P_2'$$

donde P_1' y P_2' son los períodos de las nuevas variables P_1' y P_2' ; K_1 y K_2 son enteros. Similarmente deben cumplirse las relaciones:

$$(3)\ A_1(\omega - 2\pi S_1/S_2, q_1', q_2') - A_1(\omega, q_1', q_2') + 2\, f_1\, \pi/S_2 = L_1 P_1'$$

$$(4)\ A_2(\omega - 2\pi S_1/S_2, q_1', q_2') - A_2(\omega, q_1', q_2') + 2\, f_2\, \pi/S_2 = L_2 P_2'$$

donde L_1 y L_2 son también enteros.

Vamos a analizar estas últimas relaciones bajo la afirmación de G. Contopoulos que si el cociente s_1/s_2 es irracional, siendo los K y L arbitrarios, la expresión:

$$\omega + 2\pi\ (K + L\ s_1/s_2)$$

puede aproximarse a ω tanto como se quiera. Para ello consideremos las ecuaciones (1) y (3). Multipliquemos en (1,3) la primera por 2π , la segunda por s_1/s_2, sumemos las expresiones obtenidas y al resultado sumemos a ambos miembros la cantidad ω . Obtenemos

$$2\pi\ \left[A_1(\omega + 2\pi, q_1', q_2') - A_1(\omega, q_1', q_2')\right) +$$

$$+ S_1/S_2\ \left[A_1(\omega, 2\pi S_1/S_2, q_1', q_2') - A_2(\omega, q_1', q_2') + 2f_1\ \pi/S_2\right] + \omega$$

$$= \omega + 2\pi\ (K_1 + L_1\ S_1/S_2)\ P_1'$$

Mediante operaciones totalmente similares con las expresiones (2,4) tenemos:

$$2\pi\left[A_2(\omega+2\pi, q_1', q_2') - A_2(\omega, q_1', q_2')\right) + S_1/S_2\left[\ (\omega-2\pi\ S_1/S_2, q_1', q_2') -\right.$$

$$\left. - A_2(\omega, q_1', q_2') + 2f_2\ \pi/S_2\right] + \omega = \omega + 2\pi\ (K_2 + L_2\ S_1/S_2) P_2'$$

Si ahora admite la posibilidad que pueda ser aproximado tanto como se quiera nos encontramos que deben verificarse las expresiones:

$$A_1(\omega+2\pi, q_1', q_2') - A_1(\omega, q_1', q_2') = 0$$
$$A_1(\omega-2\pi\ S_1/S_2, q_1', q_2') - A_2(\omega, q_1', q_2') = 0$$
$$f_1 = 0\ ,\ f_2 = 0\ (f \text{ independiente de } q_1' \text{ y } q_2')$$

lo que implica que los valores de P_1' y P_2' deben ser nulos, de lo cual resulta que las variables p_1' y p_2' se reducen a constantes (a lo sumo se convierten en funciones de muy largo período). De ésto se deduce que la función determinante S depende de constantes (o de funciones de muy largo período) y en consecuencia su desarrollo en serie diverge. En estas condiciones la transformación:

$(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (q_1', q_2', p_1', p_2')$, no puede tener lugar en las condiciones impuestas por G. Contopoulos.

C.D.D.

De esta manera debe considerarse que se ha justificado la no validez del teorema, del cual G.E.O. Giacaglia ha encontrado la excepción mencionada en el resumen.

BIBLIOGRAFIA

Giacaglia, G.E.O. 1965, Evaluation of Methods of Integration By Series in Celestial Mechanics, A Dissertation Presented to the Faculty of the Graduate School of Yale University in Candidancy for the Degree of Doctor of Philosophy, Reprint, Universidade de Sao Paulo.

Contopoulos, G. 1963, On the Existence of a Third Integral of Motion. Astron. J. **68**, N° 1, N° 1306.